

Correlaciones entre fallidos y derivados de crédito: un modelo para la valoración de CDO*

Juan Ignacio Peña Sánchez de Rivera
Departamento de Economía de la Empresa
Universidad Carlos III de Madrid

Resumen

Este trabajo presenta un modelo factorial para el cálculo de la función de distribución de fallidos de instrumentos de deuda con riesgo, para un horizonte dado. El modelo es especialmente útil si se desea estudiar los cuantiles más extremos de la distribución de pérdidas por fallido. Se muestra la relación del modelo con la formulación mediante Cópulas. Finalmente se expone como utilizar el modelo en la valoración de los tramos de un CDO típico.

Palabras clave: probabilidad de fallido, cópulas, CDO.

Clasificación JEL: C13, C22, G12.

Abstract

This paper presents a factor model to compute the distribution function of the returns given by a portfolio of debt instruments with default risk for a given time horizon. The model is particularly useful for the study of the most extreme quantiles of the credit loss distribution. The relationship of this model with the Copulas formulation is given. The model is applied to the pricing of a typical CDO.

Keywords: default correlation, copulas, CDO.

JEL Classification: C13, C22, G12.

1. Introducción

Los CDO (*Collateralized Debt Obligations*) se han convertido en los últimos años en uno de los contratos mas usados en los mercados de riesgos sobre crédito, véase por ejemplo Bluhm *et al.* (2003) y Dvorak (2003).

Un CDO es un producto compuesto de una serie de tramos, que pertenece a la familia de los ABS (*Asset Backed Securities*) que son instrumentos financieros cuyo valor esta garantizado por un grupo (*pool*) de activos. Estos activos pueden ser de renta fija, como los dos tipos más habituales de los CDO: los CBO (*Collateralized Bond Obligations*) donde el *pool* está formado por bonos con riesgo y los CLO (*Collateralized Loan Obligations*) donde el *pool* esta compuesto por préstamos bancarios.

Los activos de referencia pueden ser también productos derivados, como en el caso de los CSO (*Collateralized Swap Obligations*), donde el *pool* es un grupo de CDS (*Credit Default Swaps*). Es este último caso, también conocido como CDO sintético, el inversor (*protection seller*) se compromete a cubrir un rango de pérdidas en el *pool* definido por un tramo específico y a cambio recibe pagos periódicos.

* El autor agradece los comentarios de Santiago Forte, Javier Torres y Miguel Adroher y la ayuda financiera del proyecto DGICYT BEC2002-0279.

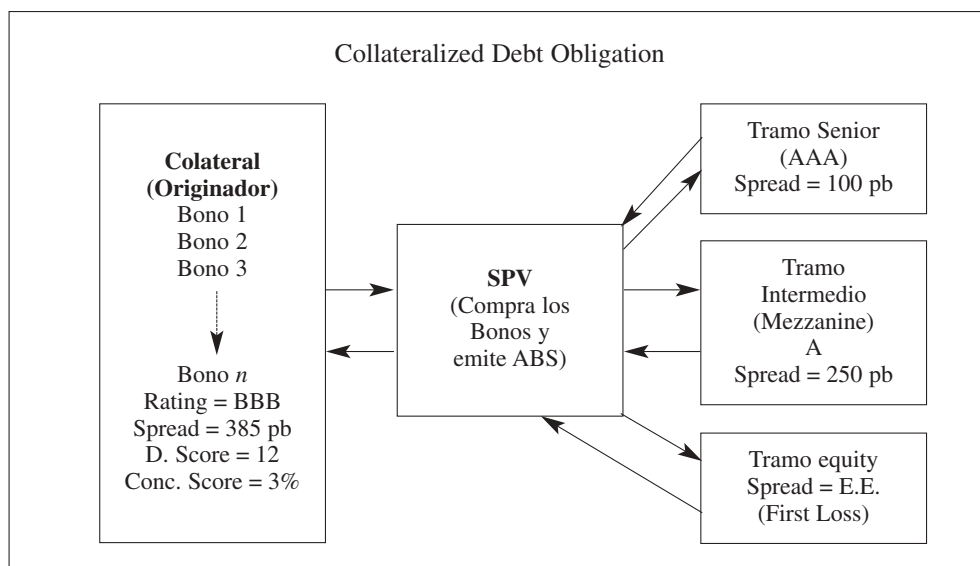
Fecha de esta versión: noviembre de 2004.

En general, los ABS pueden basarse sobre cualquier grupo de activos que generen unos flujos de caja que puedan estructurarse de tal forma que satisfagan las preferencias de un grupo de inversores dado. En el caso concreto de los CDO, una ventaja de este tipo de productos es que permiten a los inversores diversificar sus carteras de riesgo de crédito y obtener exposiciones muy «a la medida». Una estructura típica de un CDO (CBO) esta en la Figura 1. Algunas de las razones que hacen atractivo el uso de los CDO son:

- a) **Oportunidades de arbitraje de correlación:** como las primas de crédito de los bonos del *pool* de referencia se han calculado individualmente, estas reflejaran el riesgo de fallido de cada emisor por separado. Sin embargo, los tramos del CDO se valoran sobre la cartera conjunta de todos los bonos y por tanto se tienen en cuenta no solo las probabilidades de fallido de activos individuales, sino también las correlaciones entre esas probabilidades. Esto ocasionara que, si estas correlaciones no son cero, el riesgo de fallido de la cartera sea menor que la suma de los riesgos individuales y por tanto la prima de crédito de la misma también sea menor que la suma de las primas de crédito individuales, por lo que el uso de CDO permite arbitrar esa diferencia. Además, el uso de tramos de diverso nivel de riesgo contribuye a ese arbitraje de prima de crédito ya que los tramos pueden venderse con una prima de crédito relativamente baja si se ha construido una base de capital crediticio suficiente para la protección de los tramos senior del CDO.
- b) **Gestión del capital regulatorio:** esto es sobre todo adecuado en los casos de CLO y el objetivo es eliminar del balance el peso de un grupo de préstamos y por consiguiente se disminuye el capital de garantía que el regulador exige al banco originador. Se trata de una forma más de securitización. Por otra parte, si el capital regulatorio exigido por los préstamos no contempla el ajuste por riesgo (por ejemplo, si el capital se calcula como una proporción fija del nominal), aparecen distorsiones de precios, ya que los costes de capital del préstamo son independientes de la calidad crediticia del prestatario. Esta distorsión puede arbitrarse usando CLO.
- c) **Obtención de fondos:** se aplica a aquellas transacción que son puras «ventas» de elementos del activo del banco originador, que, de esta manera, hace líquidas posiciones que antes no lo eran, vendiendo esos activos a una entidad que, en ocasiones, puede ser creada específicamente para gestionar el CDO y que suelen ser conocidas como SPV (*Special Purpose Vehicle*), que a continuación emite los tramos para refinanciar los activos adquiridos al banco.
- d) **Transferencia económica del riesgo:** este motivo es relevante si los costes de securitización son mas bajos que las pérdidas en la rentabilidad esperada de la cartera de referencia.

Un aspecto interesante de los CDOs es que los precios de cada tramo solo dependen, en general, de las pérdidas y ganancias esperadas en cada fecha de pago de los flujos de caja correspondientes a cada tramo. Las ganancias esperadas son los ingresos (intereses) que se reciben en cada momento de pago y serán una cierta proporción de un cierto notional fijo (subconjunto del *pool*), descontadas al tipo de interés adecuado. Las pérdidas serán los posibles fallidos asociados a ese notional, también descontadas por el tipo de interés relevante. Por tanto, el comportamiento de los precios de los tramos de un CDO sólo va a depender de

FIGURA 1
ESTRUCTURA TÍPICA DE UN CDO



	(% Colateral)	Rating	Spread/Libor	Min O/C ratio	Min I/C ratio
Senior	75%	AAA	100 pb	120	140
Mezzanine	10%	A	250 pb	110	125
Equity	15%	—	—	—	—

NOTAS:

$O/C(t) = \text{Par value(pool)}/\text{Par Value}(t)$

$I/c(it) = \text{Par value(pool)} * \text{Cupón medio Ponderado} / \text{Par Value}(t) * \text{Cupon}(t)$

Diversity Score = Grado de diversificación por sectores industriales (cuanto más alto mayor diversificación, $1 \leq DS \leq 132$)

Concentración Score = Exposición a un solo emisor

FUENTE: Elaboración propia.

esos ingresos (que están fijados a priori en el contrato) y de la distribución de las posibles pérdidas en cada fecha de pago. En otras palabras, para valorar un CDO no es necesario conocer el proceso que siguen los fallidos del colateral, sino solamente cual es su distribución de pérdidas en cada momento de pago.

Así pues, sólo es necesario calcular la distribución de pérdidas esperada en cada momento de pago, sin que sea necesario estudiar como interactúan las distribuciones de pérdidas en cada instante del tiempo; es decir de que forma las pérdidas en la i -ésima fecha de pago pueden afectar a las pérdidas en la $i + 1$ -ésima fecha de pago.

La valoración de CDO ha recibido una atención creciente en la literatura, como puede verse por ejemplo en Bielecki y Rutkowski (2004), Bluhm (2003), Laurent y Gregory (2003) y Mina y Stern (2003). En este trabajo proponemos un modelo analíticamente manejable que permite calcular esa distribución de pérdidas y valora los tramos de un CDO.

En la sección 2 se presenta este modelo; en primer lugar un caso simple y a continuación su generalización. El modelo es particularmente útil si se está interesado en los cuantiles más extremos (por ejemplo, 99,9 por 100) de la distribución de pérdidas por fallido. Es en estos casos, donde cambios aparentemente superficiales en la distribución de los factores de riesgo o del componente idiosincrásico, pueden ocasionar grandes cambios en los cuantiles. En la sección 3 se relaciona el modelo con el enfoque de Cópulas. En la sección 4 se aplica el modelo a la valoración de un CDO típico. Finalmente, la sección 5 presenta las principales conclusiones y señala futuras líneas de investigación

2. El modelo

Como características deseables de un modelo de distribución de fallidos, Duffie y Singleton (2003), Schönbucher (2003) y Turnbull (2003), sugieren que un modelo potencialmente útil, debería satisfacer los siguientes criterios:

- a) **Dependencia entre fallidos:** el modelo debe ser capaz de reproducir dependencia entre los impagos de magnitud realista. Servigny y Renault (2002) presentan evidencia sobre correlaciones con un horizonte de un año, donde este valor oscila entre el 5-10 por 100 entre los diversos sectores. Si se aumenta el horizonte (3, 5 años) las correlaciones aumentan en todos los sectores.
- b) **Parsimonia:** el número de parámetros empleado para definir la estructura de dependencia no debería ser muy grande. Por tanto, esto descarta modelos donde la correlación entre las probabilidades de fallido esté asociada a características particulares de cada empresa (por ejemplo cualquier tipo de «beta» individual). De aquí se sigue la necesidad de agrupar a los bonos en carteras «sectoriales» o «regionales» según algún tipo de criterio.
- c) **Agrupamiento:** El modelo debería generar agrupamientos de fallidos (correlación entre los impagos) ya que esto es lo observado en la realidad, donde se presentan «clusters» de fallido en momentos cercanos del tiempo.
- d) **Datos:** los datos empleados para calibrar el modelo deberían estar accesibles. En la actualidad se dispone de medidas individuales de la estructura temporal de las probabilidades de fallido para empresas que pertenecen a determinados grupos (sectores industriales, calificaciones crediticias). La información sobre correlaciones de fallido es bastante limitada y sólo se suele encontrar para agrupaciones sectoriales dentro de un determinado país. El problema es que los fallidos conjuntos no son un fenómeno frecuente y hay que utilizar muestras que cubran varias décadas para obtener un mínimo fiable de observaciones.
- e) **Estructura de relaciones:** sería conveniente que el modelo fuese lo suficientemente flexible para, por un lado, permitir la modelización de las distribuciones marginales de las probabilidades de fallido individuales y por otro que permitiese una amplia capacidad de maniobra para reflejar la estructura de interdependencia entre las variables. Un instrumento estadístico que permite realizar este objetivo es el uso de Cópulas.
- f) **Implementación:** el modelo debería poder implementarse a ser posible con expresiones analíticas cerradas y susceptible de simulación Monte Carlo.

El modelo que aquí se presenta satisface todos los criterios deseables expuestos anteriormente.

2.1 Caso simple

El modelo que presentamos se basa en un enfoque estructural, en la línea de la clase de modelos expuestos inicialmente en Vasicek (1991) y posteriormente desarrollados en Lucas et al. (2001), Schönbucher (2003) y Hull y White (2004) entre otros.

Hipótesis 1

- Consideramos la evolución crediticia (fallido) de una cartera de activos con riesgo de fallido, desde el momento 0 hasta un horizonte dado T .
- La cartera esta compuesta por N instrumentos emitidos por N emisores diferentes.
- Los bonos tiene igual valor (exposición) L e idéntica tasa de recuperación c .
- Si denominamos X al número de fallidos que ocurren hasta (y en) el momento T , la pérdida por fallido es $X(1 - c)L$.
- Por tanto, para estimar la distribución de las perdidas por fallidos es suficiente conocer la distribución acumulada del numero de fallidos X hasta el horizonte T .

Hipótesis 2

- El fallido de cada emisor esta ocasionado por el cambio de valor (rentabilidad) de los activos de la empresa. La rentabilidad de los activos del n -ésimo emisor en el instante t es $V_n(t)$.
- Sin pérdida de generalidad, fijamos el valor inicial de la rentabilidad de los activos a cero, es decir, asumimos $V_n(0) = 0$.
- El emisor n impaga si el valor de su empresa cae, en cualquier instante t , $0 < t \leq T$, por debajo de una barrera preespecificada K_n . Esta barrera depende de las probabilidades acumuladas individuales de fallido para el horizonte considerado T , p_n , de tal forma que $K_n = M^{-1}(p_n)$, donde M es una cierta función de distribución.
- El valor de las rentabilidades de los activos de los diferentes emisores esta correlacionado entre sí. La matriz de varianzas-covarianzas (constante en el tiempo) de V_1, V_2, \dots, V_N la denominamos Σ .

Hipótesis 3

Las rentabilidades de los activos están guiadas por un factor común Y que tiene una función de distribución t de Student con α grados de libertad Γ_α y un componente idiosincrásico ε_n , con una función de distribución t de Student con β grados de libertad Ψ_β , ambas independientes. La relación es:

$$V_n(T) = \sqrt{\rho}Y + \sqrt{(1 - \rho)}\varepsilon_n, \quad n = 1, \dots, N \quad [1]$$

donde las variables Y , ε_n tienen media cero y varianza unidad (es decir, se han dividido por sus correspondientes desviaciones típicas que son respectivamente $\sqrt{(\alpha - 2)/\alpha}$ y $\sqrt{(\beta - 2)/\beta}$) donde $\alpha, \beta \geq 5$ (para garantizar la existencia de coeficientes de asimetría y curtosis) y donde además $1 \geq \rho \geq 0$.

El factor de riesgo sistemático es un indicador del estado del ciclo económico y el factor idiosincrásico recoge efectos específicos de cada empresa tales como la calidad de su equipo directivo. Los valores de las rentabilidades de los activos de dos emisores, por ejemplo m y n ($m \neq n$) están correlacionados con coeficiente de correlación lineal ρ . Nótese que condicional a la realización del factor sistemático Y , las rentabilidades de los activos de cada empresa y los fallidos son independientes.

En lo que sigue, asumiremos que todos los bonos tienen la misma barrera de fallido definida como $K = \Psi_\beta^{-1}(p^*(T))$, donde $p^*(T)$ es la probabilidad individual (incondicional) de fallido para el horizonte T y la misma exposición $L = 1$. Asumimos que, en primer lugar, se observa la realización y del factor de riesgo Y . A continuación y condicional al estado de la economía, los fallidos individuales ocurren independientemente con una probabilidad $p(y)$ que depende del estado de la economía.

Por tanto, la probabilidad acumulada (condicional) de fallido de cada emisor en el horizonte T es:

$$p(y) = P[V_n(T) < K \mid Y = y] = \Psi_\beta \left(\frac{K - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}} \right)$$

donde Ψ_β es la función de distribución de una t de Student con β grados de libertad. Nótese que esta probabilidad es una función *decreciente* de los valores de y .

Las probabilidad de observar exactamente n fallidos en el horizonte T , es el promedio de las probabilidades condicionales de n fallidos, promediados sobre las posibles realizaciones de Y , ponderados por su función de densidad de probabilidad $\tau_\alpha(y)$.

$$P[X = n] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = n \mid Y = y] \tau_\alpha(y) dy \quad [3]$$

Condicional a la realización $Y = y$ del factor sistemático, la probabilidad de que ocurran n fallidos viene dada por la distribución binomial

$$P[X = n \mid Y = y] = \binom{N}{n} (p(y))^n (1 - p(y))^{N-n} \quad [4]$$

debido a la hipótesis de independencia condicional de los fallidos. Sustituyendo [2] y [4] en [3] obtenemos

$$P[X = n] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N}{n} \left(\Psi_\beta \left(\frac{K - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^n \left(1 - \Psi_\beta \left(\frac{K - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^{N-n} \tau_\alpha(y) dy \quad [5]$$

La función de distribución de los fallidos es:

$$P[X \leq m] = \sum_{n=0}^m \binom{N}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi_\beta \left(\frac{K - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^n \left(1 - \Psi_\beta \left(\frac{K - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right)^{N-n} \tau_\alpha(y) dy \quad [6]$$

Las Tablas 1 a 6 muestran el VaR (calculado como el percentil de la distribución correspondiente) a los niveles de confianza de 99 por 100 y 99,9 por 100 de la distribución de pérdidas en una cartera tipo ($N = 100$, $p^*(T) = 0,05$) con diferente nivel de correlaciones de activos y diferentes valores para α y β , los grados de libertad de las distribuciones del factor de riesgo y del componente idiosincrásico.

Pueden observarse los siguientes hechos. En todos los casos, cuanto mayor es la correlación, mayor es el número de fallidos. Si $\alpha = \beta$, para un nivel dado de correlación, cuanto menores son los grados de libertad, mayor es el número de fallidos, para el nivel de confianza del 99,9 por 100. La explicación de este hecho es que cuanto menores son los grados de libertad de las distribuciones t , hay alta probabilidad de que aparezcan valores extremos tanto en el factor de riesgo como en el componente idiosincrásico, lo cual aumenta la volatilidad del valor de la empresa y por tanto la probabilidad de que toque la barrera de fallido.

TABLA 1

VaR AL 99% Y 99,9% PARA LA CARTERA TIPO
 $N = 100, p = 0,05, \alpha = 5, \beta = 5$

Correlación (%)	VaR 99%	VaR 99,9%
0	11	13
1	11	14
10	19	43
20	29	72
30	39	88
40	50	96
50	62	99

NOTAS:

La tabla muestra los distintos valores del VaR para la cartera tipo y para diferentes valores del coeficiente de correlación ρ en la ecuación [1]. Los valores son número de fallidos.

TABLA 2

VaR AL 99% Y 99,9% PARA LA CARTERA TIPO
 $N = 100, p = 0,05, \alpha = 10, \beta = 10$

Correlación (%)	VaR 99%	VaR 99,9%
0	11	13
1	11	14
10	19	31
20	29	52
30	40	70
40	52	83
50	64	93

NOTAS:

La tabla muestra los distintos valores del VaR para la cartera tipo y para diferentes valores del coeficiente de correlación ρ en la ecuación [1]. Los valores son número de fallidos.

TABLA 3

VaR AL 99% Y 99,9% PARA LA CARTERA TIPO
 $N = 100, p = 0,05, \alpha = 15, \beta = 15$

Correlación (%)	VaR 99%	VaR 99,9%
0	11	13
1	11	14
10	19	29
20	27	48
30	37	66
40	49	81
50	61	91

NOTAS:

La tabla muestra los distintos valores del VaR para la cartera tipo y para diferentes valores del coeficiente de correlación ρ en la ecuación [1]. Los valores son número de fallidos.

TABLA 4

VaR AL 99% Y 99,9% PARA LA CARTERA TIPO
 $N = 100, p = 0,05, \alpha = 50, \beta = 50$

Correlación (%)	VaR 99%	VaR 99,9%
0	11	13
1	11	14
10	19	27
20	25	41
30	31	53
40	37	66
50	43	77

NOTAS:

La tabla muestra los distintos valores del VaR para la cartera tipo y para diferentes valores del coeficiente de correlación ρ en la ecuación [1]. Los valores son número de fallidos.

Para un nivel dado de correlación, si $\beta > \alpha$, mayor es el número de fallidos; por el contrario si $\alpha > \beta$, es menor. Nótese que si $\beta > \alpha$ esto implica que hay mas probabilidad de que aparezcan valores extremos en el factor de riesgo común que en el componente idiosincrásico y que estos valores extremos se multiplican por la correlación $\sqrt{\rho}$. Cuanto mayor sea ésta, más peso tendrán las colas de la distribución de V . Por el contrario, si $\alpha > \beta$ los valores «más extremos» del componente idiosincrásico se multiplican por $\sqrt{1 - \rho}$ y cuanto más alta sea la correlación, menor peso tendrán las colas de la distribución, ya que aparecerán menos valores extremos en la distribución de los activos y la probabilidad de que el valor de los activos de la empresa caiga por debajo del nivel de la barrera de fallido es menor. Las Tablas 5 y 6 ilustran este efecto.

En resumen, una disminución del valor de β (aumento de la volatilidad y curtosis del componente idiosincrásico) tiene un efecto similar a la disminución del coeficiente de corre-

TABLA 5
VaR AL 99% Y 99,9% PARA LA CARTERA TIPO
 $N = 100, p = 0,05, \alpha = 5, \beta = 10$

Correlación (%)	VaR 99%	VaR 99,9%
0	11	13
1	12	15
10	23	51
20	36	80
30	48	93
40	60	98
50	72	99

NOTAS:

La tabla muestra los distintos valores del VaR para la cartera tipo y para diferentes valores del coeficiente de correlación ρ en la ecuación [1]. Los valores son número de fallidos.

TABLA 6
VaR AL 99% Y 99,9% PARA LA CARTERA TIPO
 $N = 100, p = 0,05, \alpha = 10, \beta = 10$

Correlación (%)	VaR 99%	VaR 99,9%
0	11	13
1	11	13
10	16	26
20	23	43
30	32	61
40	42	76
50	54	87

NOTAS:

La tabla muestra los distintos valores del VaR para la cartera tipo y para diferentes valores del coeficiente de correlación ρ en la ecuación [1]. Los valores son número de fallidos.

lación, es decir, las colas de la distribución de pérdidas se hacen más delgadas. Por el contrario, una disminución del valor de α (aumento de la volatilidad y curtosis del factor de riesgo) tiene un efecto similar al aumento de la correlación y por tanto es mayor la probabilidad de grandes pérdidas.

Resulta interesante comprar los casos más extremos, presentados en la Tabla 4, donde el modelo es muy similar al estándar de Basilea II (Normalidad) con la Tabla 1 donde se permiten bajos valores de α y β . La diferencia en los cuantiles mas extremos (99,9 por 100) es notable para niveles de correlación superior al 10 por 100. Para niveles típicos de correlación como el 20 por 100, la diferencia entre numero de fallidos esperados es de 41 en la Tabla 4 y de 72 en la Tabla 1.

El modelo se muestra, por tanto, mas útil si se esta interesado en los cuantiles más extremos (por ejemplo 99,9 por 100) de la distribución de pérdidas por fallido. Es en estos casos

donde cambios aparentemente superficiales en la distribución de los factores de riesgo o del componente idiosincrásico, pueden ocasionar grandes cambios en los cuantiles y por tanto en el capital regulatorio requerido.

Finalmente, nótese que la interpretación de las probabilidades de fallido, para un horizonte dado, puede también hacerse en términos del momento de fallido. En efecto, la probabilidad de que una empresa i falle en un horizonte fijo t puede interpretarse como la probabilidad de que el *momento de fallido* t_i de dicha empresa sea menor o igual que ese horizonte fijo, es decir la probabilidad de que $t_i \leq t$. Por ejemplo, si la probabilidad de fallido a un horizonte fijo de 1 año de la empresa i es del 5 por 100, esto puede interpretarse como que la probabilidad de que el momento de fallido de dicha empresa sea dentro de 1 año es también del 5 por 100 y por tanto su probabilidad de ser solvente dentro de mas de un año es del 95 por 100. Por tanto, el modelo puede emplearse tanto para calcular probabilidades de fallido dado un horizonte fijo, como para calcular la probabilidad de diversos momentos de fallido.

2.2. Aproximación para N grande

Si el número de emisores tiende a infinito, pueden derivarse expresiones mas manejables para la distribución de perdidas. Supongamos que la cartera esta compuesta de un número muy grande N de emisiones de tamaño uniforme. Denominamos X al porcentaje de fallidos en la cartera. Asumiremos que todos los bonos tienen la misma barrera de fallido definida como $K = \Psi_\beta^{-1}(p^*(T))$, donde $p^*(T)$ es la probabilidad individual (incondicional) de fallido para el horizonte T . Esta probabilidad de fallido es:

$$p(y) = P[V_n(T) < K | Y = y] = \Psi_\beta \left(\frac{K - \sqrt{\rho} y}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \quad [7]$$

donde Ψ_β es la función de distribución de una t de Student con β grados de libertad. Asumimos que, en primer lugar se observa la realización y del factor de riesgo Y . A continuación y condicional al estado de la economía, los fallidos individuales ocurren independientemente con una probabilidad $p(y)$ que depende del estado de la economía. Por tanto, en una cartera muy grande, la ley de los grandes números sugiere que el porcentaje de emisores que impaga es (casi con seguridad) igual a la probabilidad individual de fallido. Es decir:

$$P[|X - p(y)| > \varepsilon | Y = y] \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ si } N \rightarrow \infty \quad [8]$$

La probabilidad de que el porcentaje de fallidos sea menor o igual que una cierta cantidad $x \in [0, 1]$ podemos escribirla, utilizando la ley de las esperanzas iteradas:

$$P[X \leq x] = E[P[X \leq x | Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X \leq x | Y] \tau_\alpha(y) dy \quad [9]$$

Usando el resultado en [8] podemos escribir [9] como

$$P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = p(y) \leq x | Y = y] \tau_\alpha(y) dy \quad [10]$$

es decir:

$$P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{p(y) \leq x\}} \tau_{\alpha}(y) dy = \int_{-y^*}^{\infty} \tau_{\alpha}(y) dy = \Gamma_{\alpha}(\infty) - \Gamma_{\alpha}(-y^*) = \Gamma_{\alpha}(y^*) \quad [11]$$

donde $\mathbf{1}_{\{p(y) \leq x\}}$ es una variable de Bernouilli y donde Γ_{α} es la función de distribución del factor de riesgo, que sigue una t de Student con α grados de libertad. Se ha elegido y^* tal que $p(-y^*) = x$, es decir:

$$p(-y^*) = x = \Psi_{\beta} \left(\frac{K - \sqrt{\rho}(-y^*)}{\sqrt{1-\rho}} \right) \quad [12]$$

y por tanto:

$$y^* = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{1-\rho} \Psi_{\beta}^{-1}(x) - K) \quad [13]$$

Sustituyendo [13] y [7] en [11] tenemos la función de distribución del porcentaje de fallidos X ,

$$F(x) = P[X \leq x] = \Gamma_{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{1-\rho} \Psi_{\beta}^{-1}(x) - \Psi_{\beta}^{-1}(p^*)) \right) \quad [14a]$$

Dado un nivel de confianza $F(x)$, el porcentaje de fallidos x para ese nivel es

$$x = \Psi_{\beta} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}} \Gamma_{\alpha}^{-1}(F(x)) \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \Psi_{\beta}^{-1}(p^*) \right) \quad [14b]$$

Si los grados de libertad α y β tienden a infinito, la ecuación [14a] converge a la aproximación mediante la Normal de la forma:

$$F(x) = P[X \leq x] = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p^*)) \right) \quad [15]$$

Esta aproximación forma el núcleo del modelo para el cálculo del riesgo de crédito propuesto por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, en el marco del Acuerdo de Basilea II, véanse BIS (2001) y Trucharte y Marcelo (2001). En la Tabla 7 se muestran los requerimientos de capital para grandes exposiciones (*corporate exposures*) utilizando las formulas [14a,b] y [15]. Puede verse como, en general, los requerimientos son mayores usando [14a,b]. Es inmediato comprobar que si disminuye la correlación o la probabilidad incondicional de fallido, disminuye también el capital requerido.

Ninguna de las dos aproximaciones [14] y [15] es muy precisa bien en los casos de poca proporción de fallidos (0 o 1 por 100) ni tampoco en los casos de baja correlación (0 o 1 por 100). En los otros casos da valores de VaR que son siempre superiores a los obtenidos aplicando la fórmula exacta [6].

2.3. Generalización

Supongamos ahora que hay $C(i)$, $i = 1, 2, \dots, g$ clases diferentes de emisores, cada una de ellas con barrera de fallido $K_{n(i)}$ y que dentro de cada clase hay un número de emisores

TABLA 7
REQUERIMIENTOS DE CAPITAL CON ECUACIONES [14] Y [15]

	$\alpha = 5, \beta = 5$	$\alpha = 5, \beta = 10$	$\alpha = 10, \beta = 5$	$\alpha = \beta = 10$	$\alpha = \beta = 30$	$\alpha = \beta = 100$	$\alpha = \beta = \infty$
PF(TSP)	0,64	0,68	0,48	0,52	0,46	0,45	0,44
BRW(PD)	692	741	518	566	506	489	482,3
RW(PD)	692	625	518	566	506	489	482,3
CR	50%	50%	41,4%	45,3%	40,5%	39,1%	38,6%

NOTAS:

Los parámetros empleados son: TSP (*Target Solvency Probability*) = 0,995, (Correlación) $\rho = 0,20$, PD (*Probability of Default*) = 0,10, LGD (*Loss Given Default*) = 0,5. PF(TSP) es el porcentaje de fallidos obtenido empleando la ecuación [14b]. Aplicamos las siguientes definiciones y ecuaciones. La ecuación para BRW (*Benchmark Risk Weights*) es $BRW(PD) = 976,5 * PF(TSP) * (1 + 0,047 * (1 - PD) / PD^{0,44})$. Para RW (*Risk Weights*): $RW(PD) = \text{Min}\{LGD/50 * BRW(PD), 12,5 * LGD\}$. El capital requerido (CR) como porcentaje del total nominal es: $CR = 0,08 * RW(PD)$. Para las definiciones véase BIS(2001).

$N(i)$. Los valores de las rentabilidades de los activos están guiados por un factor común Y que tiene una función de distribución t de Student con α grados de libertad Γ_α y un componente idiosincrásico $\varepsilon_n(i)$, con una función de distribución t de Student con $\beta(i)$ grados de libertad $\Psi_{\beta(i)}$, ambas independientes La relación es:

$$V_{n(i)} = \frac{1}{\sqrt{\beta_i^2 + 1}} (\beta_i Y + \varepsilon_{n(i)}) \quad [16]$$

$Y, \varepsilon_{n(i)}$ tienen media cero y son independientes entre sí. Además se asume que $\alpha, \beta(i) \geq 5$. La correlación de los emisores dentro de una clase determinada $C(i)$ viene dada por el coeficiente de correlación ρ_i y la correlación entre el emisor de la clase $C(i)$ y la clase $C(j)$ viene dada por el coeficiente $\rho_{i,j}$.

$$\rho_i = \frac{\beta_i^2}{\beta_i^2 + 1} \quad \rho_{i,j} = \frac{\beta_i \beta_j}{\sqrt{\beta_i^2 + 1} \sqrt{\beta_j^2 + 1}} \quad [17]$$

Este modelo permite que la sensibilidad del valor de las rentabilidades de los activos al factor de riesgo sea diferente dentro de cada clase. Asimismo, la volatilidad del factor idiosincrásico puede ser también diferente dentro de cada clase. Nótese de nuevo que, condicional a la realización del factor sistemático Y , las rentabilidades de los activos de la empresa y los fallidos son independientes.

Asumiremos que todos los bonos, dentro de cada clase, tienen la misma barrera de fallido definida como $K(i) = \Psi_{\beta(i)}^{-1}(p_i^*(T))$, donde $p_i^*(T)$ es la probabilidad individual (incondicional) de fallido para el horizonte T y la misma exposición $L = 1$. Asumimos que, en primer lugar se observa la realización y del factor de riesgo Y . A continuación y condicional al estado de la economía, los fallidos individuales ocurren independientemente con una probabilidad $p_i(y)$ que depende del estado de la economía y de la clase de emisor.

Esta probabilidad de fallido es:

$$p_i(y) = P[V_{n(i)}(T) < K(i) \mid Y = y] = \Psi_{\beta(i)} \left(\frac{K(i) - \sqrt{\rho_i} y}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \quad [18]$$

donde $\Psi_{\beta(i)}$ es la función de distribución de una t de Student con $\beta(i)$ grados de libertad.

Las probabilidad de observar, en cada clase, exactamente n fallidos es el promedio de las probabilidades condicionales de n fallidos, promediados sobre las posibles realizaciones de Y , ponderados por su función de densidad de probabilidad $\tau_\alpha(y)$.

$$P[X(i) = n] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X(i) = n \mid Y = y] \tau_\alpha(y) dy \quad [19]$$

Condicional a la realización $Y = y$ del factor sistemático, la probabilidad de que ocurran n fallidos viene dada por la distribución binomial

$$P[X(i) = n \mid Y = y] = \binom{N(i)}{n} (p_i(y))^n (1 - p_i(y))^{N(i)-n} \quad [20]$$

debido a la hipótesis de independencia condicional de los fallidos. Sustituyendo, obtenemos

$$P[X(i) = n] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{N(i)}{n} \left(\Psi_{\beta(i)} \left(\frac{K(i) - \sqrt{\rho_i} y}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \right)^n \left(1 - \Psi_{\beta(i)} \left(\frac{K(i) - \sqrt{\rho_i} y}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \right)^{N(i)-n} \tau_\alpha(y) dy \quad [21]$$

La función de distribución de los fallidos dentro de cada clase es:

$$P[X(i) \leq m] = \sum_{n=0}^m \binom{N(i)}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Psi_{\beta(i)} \left(\frac{K(i) - \sqrt{\rho_i} y}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \right)^n \left(1 - \Psi_{\beta(i)} \left(\frac{K(i) - \sqrt{\rho_i} y}{\sqrt{1 - \rho_i}} \right) \right)^{N(i)-n} \tau_\alpha(y) dy \quad [22]$$

Veamos ahora cómo calcular la probabilidad de m fallidos para la cartera total que incluye todas las clases. Podemos reescribir la ecuación [20] como

$$P[X(i) = m(i) \mid Y = y] = \binom{N(i)}{m(i)} (p_i(y))^{m(i)} (1 - p_i(y))^{N(i)-m(i)} = b(m(i); N(i), p_i(y)) \quad [23]$$

que es la probabilidad condicional de observar $m(i)$ fallidos en la clase $C(i)$. Podemos, por tanto, calcular la probabilidad condicional total de observar m fallidos en la cartera total de la manera siguiente:

$$P[X = m \mid Y = y] = \sum_{m(1)=0}^m \cdots \sum_{m(g-1)=0}^m b(m(1); N(1), p_1(y)) \cdots b(m - m(1) - \cdots - m(g-1); N(g), p_g(y)) \quad [24]$$

donde $N(1) \geq m(1)$, $N(2) \geq m(2)$, ..., $N(g) \geq m - m(1) - \cdots - m(g-1)$; ya que si ocurren $m(1)$ fallidos en la clase $C(1)$, $m(2)$ en la $C(2)$ y así sucesivamente, necesitamos que en la última clase $C(g)$ ocurran $m - m(1) - m(2) - \cdots - m(g-1)$ fallidos para garantizar un total de m fallidos.

La probabilidad incondicional de obtener m fallidos se obtiene integrando sobre todas las posibles realizaciones del factor de riesgo Y ,

$$P[X = m] = \sum_{m(1)=0}^m \cdots \sum_{m(g-1)=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} b(m(1); N(1), p_1(y)) \cdots b(m - m(1) - \cdots - m(g-1); N(g), p_g(y)) \tau_{\alpha}(y) dy \quad [25]$$

este enfoque puede generalizarse incluyendo cambios en la asignación de un determinado emisor a una clase si el valor de sus activos supera un cierto umbral (*upgrading*) o baja de un cierto valor (*downgrading*). Asimismo pueden incluirse diversos factores de riesgo.

3. Relación con las Cópulas

El modelo (1) contiene como casos particulares, varios de los modelos que han sido empleados en la literatura de cópulas (Nielsen, 1999). Así por ejemplo, puede interpretarse como un modelo de Cópula t de Student multivariante con distribuciones marginales t . En efecto, si los valores de las rentabilidades de los N activos están guiados por un factor común Y que tiene una función de distribución t de Student con α grados de libertad Γ_{α} y un componente idiosincrásico ε_n , con otra función de distribución t de Student con α grados de libertad Ψ_{α} , ambas independientes La relación es:

$$V_n(T) = \sqrt{\rho} Y + (\sqrt{1-\rho}) \varepsilon_n \quad n = 1, \dots, N \quad [26]$$

Y, ε_n tienen media cero y donde $\alpha \geq 5$ y además $1 \geq \rho \geq 0$. Este modelo puede escribirse como

$$V_n(T) = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{W}} (\sqrt{\rho} Y^* + (\sqrt{1-\rho}) \varepsilon_n^*) \quad n = 1, \dots, N \quad [27]$$

donde Y^*, ε_n^* se distribuyen independientemente $N(0, 1)$ y donde W se distribuye como una chi-cuadrado con α grados de libertad. Si definimos F_{α} como la función de distribución de una variable t de Student con α grados de libertad y $F_{\alpha, \Omega}$ como la función de distribución multivariante t de Student con α grados de libertad y matriz de correlaciones Ω , entonces la función t -Cópula $C_{\alpha, \Omega}$ para el modelo (27) es

$$C_{\alpha, \Omega}(u_1, \dots, u_N) = F_{\alpha, \Omega}(F_{\alpha}^{-1}(u_1) \cdots F_{\alpha}^{-1}(u_N)) \quad [28]$$

Donde $u_1, \dots, u_N \in [0, 1]$. En el caso del modelo [28] la matriz de correlaciones está determinada por un solo parámetro ρ . Esta Cópula incorpora una dependencia multivariante t entre las variables, lo que ocasiona que las colas de la distribución conjunta sean más pesadas que la normal.

Otra generalización usando Cópulas es si queremos que la t -Cópula tenga η grados de libertad y las t -marginales μ grados. En ese caso, la transformación es:

$$V_n(T) = F_{\mu}^{-1} \left(F_{\eta} \left(\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{W}} (\sqrt{\rho} Y^* + (\sqrt{1-\rho}) \varepsilon_n^*) \right) \right) \quad n = 1, \dots, N \quad [29]$$

donde Y^* , ε_n^* se distribuyen independientemente $N(0, 1)$ y donde W se distribuye como una chi-cuadrado con η grados de libertad. Si definimos F_η como la función de distribución de una variable t de Student con η grados de libertad y $F_{\eta,\Omega}$ como la función de distribución multivariante t de Student con η grados de libertad y matriz de correlaciones Ω , entonces la función t -Cópula $C_{\mu,\Omega}$ para el modelo [29] es

$$C_{\mu,\Omega}(x_1, \dots, x_N) = C_{\eta,\Omega}(F_\mu(x_1), \dots, F_\mu(x_N)) = C_{\eta,\Omega}(F_\eta^{-1}(F_\mu(x_1)), \dots, F_\eta^{-1}(F_\mu(x_N))) \quad [30]$$

Con esto podemos lograr diferente grado de asociación alrededor de los valores centrales que en las colas de la distribución, según se escojan adecuadamente los grados de libertad. Por ejemplo, si se escoge para μ un valor superior a 30 (y por tanto las marginales son similares a la Normal) y un valor de η pequeño (menor que 10, por ejemplo) obtendremos unos datos relativamente poco dispersos pero con un grado de asociación en las colas de la distribución conjunta bastante superior a la normal. Es decir, la correlación entre las rentabilidades de los activos de los diferentes emisores aumentara en situaciones extremas (grandes subidas o bajadas del valor de los activos).

4. Evaluación de un CDO

En esta sección utilizaremos el modelo desarrollado en las secciones anteriores para evaluar un CDO tipo. Consideraremos un CDO típico con la siguiente estructura tanto en su lado del «activo» (el *pool* de referencia) como en el lado del «pasivo» (las ABS emitidas por el SPV):

- El *pool* de referencia esta compuesto de un número elevado de activos y la exposición de cada bono es idéntica y normalizada a 1.
- Los pagos de intereses y principal y la amortización de los tramos del CDO hacen en orden descendente de arriba abajo, primero las notas de mayor preferencia (*superseñior*) y a continuación las siguientes y así hasta el tramo de *equity*, que es el más subordinado. Habitualmente la entidad originadora se queda con este tramo del CDO.
- Las pérdidas se soportan secuencialmente de abajo arriba; el tramo de *equity* soporta la primera pérdida, el tramo *junior* la siguiente y así hasta el tramo *superseñior* que soporta las últimas pérdidas.
- Las notas del CDO están referenciadas al *pool*. El interés pagado a las notas se calcula como la cantidad siguiente: Pago de Interés(Tramo) = Volumen(Tramo) * [LIBOR + Spread(Tramo)]. Esto implica que el fallido en el pago de intereses sólo puede aparecer si la entidad originadora no paga al SPV los intereses prometidos en los bonos del *pool*. Sin embargo, debido a posibles pérdidas por fallido, la cantidad nominal de pago por intereses puede disminuir si el volumen de un tramo disminuye porque se han producido pérdidas.
- Aparte de las pérdidas por fallido del colateral no hay otros eventos que ocasionen otros flujos de caja.
- Asumimos una tasa de recuperación de cero en caso de fallido.

- El *pool* de referencia es estático (es decir no está gestionado y no se modifica).
- Los bonos del *pool* tienen una exposición del total de su nominal hasta su vencimiento (*bullet exposure until maturity*), es decir, no hay amortizaciones anticipadas del principal.
- La distribución de pérdidas por fallido, sigue el modelo de la sección 2 y en particular la aproximación para N grande dada en el apartado 2.2

Para calcular las pérdidas acumuladas hasta un horizonte dado, nótese que dadas las hipótesis anteriores basta conocer el porcentaje de fallidos. La proporción de pérdidas (fallidos) esperada en el horizonte T viene dada por la ecuación [7]. A partir de ahora y por facilidad de exposición, la denominaremos la pérdida acumulada (esperada) L en el horizonte T y es:

$$L = p(y) = P[V_n(T) < K \mid Y = y] = \Psi_\beta \left(\frac{\Psi_\beta^{-1}(p^*(T)) - \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}} \right) \quad [31]$$

La función de distribución del porcentaje de pérdidas (fallidos) hasta el horizonte T viene dada por la ecuación [14].

$$F(x) = P[X \leq x] = \Gamma_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{1-\rho} \Psi_\beta^{-1}(x) - \Psi_\beta^{-1}(p^*(T))) \right) \quad [31]$$

Entonces, cualquier partición por tramos, compuesta por q tramos, que forme el lado del «pasivo» del CDO, puede escribirse como una partición de $[0, 1]$ del modo siguiente:

$$TR_i = [a_i, a_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, q; 0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{q+1} = 1) \quad [32]$$

La pérdida L_i del tramo TR_i viene dada por

$$L_i = A_i(L) = \min[\max(0, L - a_i), a_{i+1} - a_i] \quad (i = 1, \dots, q) \quad [33]$$

Asumimos que las pérdidas están normalizadas en el intervalo unidad ($0 =$ no hay pérdidas, $1 =$ pérdida total de valor nominal del *pool*) y debe de cumplirse que

$$L = \sum_{i=1}^q L_i \quad [34]$$

A continuación calculamos la probabilidad de que el tramo TR_i sufra una pérdida. Esta probabilidad es:

$$\pi_i = 1 - \Gamma_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{1-\rho} \Psi_\beta^{-1}(a_i) - \Psi_\beta^{-1}(p^*(T))) \right) = 1 - F(a_i) \quad [35]$$

Nótese que la expresión anterior permite calcular un «rating implícito» de cada tramo del CDO, dado por el modelo, para un horizonte dado T . La generalización a múltiples fechas de pago (horizontes) es inmediata.

4.1. Un ejemplo ilustrativo

Consideremos un CDO que satisface las condiciones expuestas en la sección 4. En este caso tenemos un *cash flow* CDO simple, sin cláusulas que suponga una redirección o alteración de los pagos si se producen determinados eventos. Los parámetros para el *pool* son $\alpha = 5$, $\beta = 10$, $\rho = 0,20$, $y = -1$, $p^*(T) = 0,05$, $T = 20$. Es decir, hay una única fecha de intercambio de flujos de caja entre los participantes en el contrato. Con estos datos, la pérdida (esperada) acumulada en el horizonte temporal dado es:

$$L = p(y) = P[V_n(T) < K \mid Y = 0] = \Psi_{10}\left(\frac{\Psi_{10}^{-1}(0,05) + \sqrt{0,2}}{\sqrt{1 - 0,2}}\right) = 0,0789$$

Podemos interpretar esto como que se espera que dentro de veinte años, hayan fallado el 7,89 por 100 de los bonos del *pool* de referencia. Esto corresponde a un rating promedio de A, aproximadamente. Veamos ahora una estructura de CDO, dividida en cinco tramos. El primer tramo (*Equity*) soporta las pérdidas hasta el 2 por 100 del total. El siguiente tramo *Junior* desde el 2 por 100 hasta el 3 por 100. El siguiente tramo *Mezzanine* desde el 3 por 100 hasta el 7 por 100. El tramo *Senior* desde el 7 por 100 hasta el 15 por 100 y el tramo *SuperSenior* aquellas pérdidas que excedan el 15 por 100 del valor de la cartera de referencia.

La estructura es

Tramo	<i>Equity</i>	<i>Junior</i>	<i>Mezzanine</i>	<i>Senior</i>	<i>SuperSenior</i>
Volumen	2%	1%	4%	8%	85%
a_i	0	0,02	0,03	0,07	0,15
L_i	0,02	0,01	0,04	0,0089	0
L_i/L	25%	13%	51%	11%	0%
$F(a_i)$	0	0,2675	0,4293	0,7821	0,9395
π_i	1	73,25%	57,07%	21,79%	6,05%
Rating implícito	–	B	BB	BBB	AA

Algunos comentarios son:

- Tramo *Equity*: como la distribución de pérdidas es continua, este tramo contiene el suceso de cero pérdidas como límite inferior $a_1 = 0$ y por tanto $F(0) = 0$; es decir, la probabilidad de sufrir pérdidas es 1.
- Distribución de las pérdidas por tramos: el tramo que mayor proporción de pérdidas presenta es el *Mezzanine* y el menor es *SuperSenior*.
- Tramo *SuperSenior*: la probabilidad de que ese tramo sufra una pérdida es del 6,05 por 100 que puede parecer muy alta. Esto se debe a las cifras empleadas en este ejemplo ilustrativo. En los casos reales, valores típicos son 0,10 por 100 o menores.

El rating implícito obtenido puede utilizarse para calcular el cupón que debe pagar cada tramo del CDO, de tal forma que sea consistente con las condiciones de mercado. Tenemos pues una forma inmediata de valorar así el CDO. La generalización a varias fechas de pago es inmediata.

5. Conclusiones

Este trabajo presenta un modelo de un factor con distribuciones t de Student para el cálculo de la distribución de fallidos de una cartera de activos con riesgo de impago en un horizonte dado. Este modelo es más flexible y general que el recomendado por el Comité de Basilea dentro del marco del Acuerdo de Basilea II. En concreto, el modelo de Basilea II es un caso particular del propuesto en este trabajo. El modelo es particularmente útil si se está interesado en los cuantiles más extremos (por ejemplo, 99,9 por 100) de la distribución de pérdidas por fallido. Es en estos casos donde cambios aparentemente superficiales en la distribución de los factores de riesgo o del componente idiosincrásico, pueden ocasionar grandes cambios en los cuantiles y por tanto en el capital regulatorio requerido.

También se relaciona el modelo con el enfoque de Cópulas, observándose como varias de las formulaciones más utilizadas en la práctica pueden verse como casos particulares del modelo.

En este trabajo también se muestra cómo aplicar el modelo a la valoración de los tramos de un CDO típico.

Futuras extensiones podrían ser la ampliación del número de factores de riesgo y la introducción de otro tipo de distribuciones, su aplicación a la valoración de CDO complejos y con cláusulas de reestructuración, así como calibrar el modelo a tramos (*tranches*) sobre índices estándar de mercado (por ejemplo tramos del i-Traxx).

Referencias bibliográficas

- [1] BIELECKI, T. y RUTKOWSKI, M. (2004): *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer Finance.
- [2] BIS (2001): «Basel Committee on Banking Supervision. The Internal Ratings-Based Approach», *Consultative Document*.
- [3] BLUHM, C. (2003): «CDO Modeling: Techniques, Examples and Applications», *Working Paper*, HypoVereinsbank.
- [4] BLUHM, C.; OVERBECK, L. y WAGNER, C. (2003): *An Introduction to Credit Risk Modelling*, Chapman and Hall.
- [5] DUFFIE, D. y SINGLETON, K. J. (2003): *Credit Risk: Pricing, Measurement and Management*, Princeton University Press.
- [6] DVORAK, B. (2003): «Active Credit Portfolio Management and CDOs», *Working Paper*, Moody's KMV.
- [7] HULL, J. y WHITE, A. (2004): «Valuation of a CDO and an n^{th} to default CDO without Monte Carlo simulation», *Journal of Derivatives*, próxima aparición.
- [8] LAURENT, J.-P. y GREGORY, J. (2003): «Basket Default Swaps, CDO's and Factor Copulas», http://laurent.jeanpaul.free.fr/basket_cdo_factor_copula_2003.pdf.
- [9] LUCAS, A.; KLAASEN, P.; SPREIJ, P. y STAETMANS, S. (2001): «An analytic approach to credit risk of large corporate bond and loan portfolios», *Journal of Banking and Finance*, 25, 1635-1664.
- [10] MINA, J. y STERN, E. (2003): «Examples and applications of closed-form CDO pricing», *Working paper*, RiskMetrics Group.

- [11] NIELSEN, R. B. (1999): *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag.
- [12] SCHÖNBUCHER, P. J. (2003): *Credit Derivatives Pricing Models*, Wiley.
- [13] SERVIGNY, A. y RENAULT, O. (2002): «Default Correlation: empirical evidence», *Working Paper*, Standard and Poors.
- [14] TRUCHARTE, C. y MARCELO, A. (2001): «Modelo factoriales de riesgo de crédito: el modelo de Basilea II y sus implicaciones», *Estabilidad Financiera*, n.º 1, septiembre, pp. 205-218.
- [15] TURNBULL, S. (2003): «Practical Issues in Modeling Default Dependence», *Working Paper*, University of Houston.
- [16] VASICEK, O. (1991): «Limiting loan loss probability distribution», *Working Paper*, KMV Corporation.

